

Métodos topológicos en el análisis no lineal

Clase 20, 16/11 - Versión preliminar

1 Es todo, todo tan fugaz

Han pasado unas cuantas clases desde aquella lejana cita de abril (mejor dicho, agosto). Y así, entre tango y mate¹ hemos llegado al último de los temas, que consiste en extender a dimensión infinita el grado de Brouwer. El llamado *grado de Leray-Schauder* va a estar definido para funciones $F : \bar{\Omega} \rightarrow X$, donde X es un espacio de Banach y Ω es un abierto acotado. Sin embargo, tal como anticipamos, esto no se va a poder hacer para cualquier F : este encuentro con Kakutani nos ha hecho tanto mal... Pero para no terminar “envenenados”, podemos ya decir que el grado se define razonablemente para las perturbaciones compactas de la identidad, es decir, de la forma $F = I - K$, donde K es un operador compacto. No es poca cosa, teniendo en cuenta la gran variedad de problemas que se pueden escribir en la forma $Lu = Nu$, donde L tiene inversa compacta. Por simplicidad, vamos a definir por ahora únicamente el grado en 0, que luego se extiende por traslación a cualquier otro punto. Luego, vamos a pedir como condición que $F \neq 0$ en $\partial\Omega$, lo que equivale a decir que K no tiene puntos fijos en el borde.

Si nos dejamos llevar por la idea intuitiva (y algo engañosa) de que el grado es una especie de conteo algebraico de los ceros de una función, entonces es fácil imaginar el procedimiento a seguir. Notemos, en primer lugar, lo más obvio: los ceros de F pertenecen a la imagen de K . Pero -dijimos- un operador compacto se puede aproximar por un operador K_ε de rango finito, es decir, contenido en cierto subespacio V_ε de dimensión finita. De este modo, la imagen de F está “cerca” de cierto conjunto compacto de V_ε . Por otra parte, pretendemos construir un grado que sea localmente constante, así que alcanzaría con calcular el grado de $I - K_\varepsilon$. Para terminar, resta observar que, como los puntos fijos de K_ε se encuentran en V_ε , entonces basta con calcular del grado (¡de Brouwer!) del operador $I - K_\varepsilon$ restringido al conjunto $\Omega \cap V_\varepsilon$.

Claro que de la intuición al hecho hay largo trecho, así que debemos hacer las cosas con cuidado. En primer lugar, elegir el valor de ε apropiado: como mínimo, necesitamos que si K_ε es una ε -aproximación de K , entonces K_ε no

¹La referencia deja ver a las claras que Cadícamo es un compositor pre-pandémico. A menos, claro, que Madame Ivonne usara su propia bombilla para evitar compartirla con “aquel argentino”.

tenga puntos fijos en $\partial\Omega$. Y otra vez nos salva las papas el hecho de que K es compacto:

Lema 1.1 *Sean $\Omega \subset X$ un abierto acotado y $F : \overline{\Omega} \rightarrow X$ dada $F = I - K$ con K compacto tal que $Kx \neq x$ para $x \in \partial\Omega$. Entonces $\text{dist}(0, F(\partial\Omega)) > 0$.*

Demostración: Supongamos que existen $x_n \in \partial\Omega$ tales que $F(x_n) \rightarrow 0$. Tomando una subsucesión, podemos suponer $K(x_n) \rightarrow x \in \overline{\Omega}$ y entonces $x_n = K(x_n) \rightarrow x$. Esto implica que $x \in \partial\Omega$ y $K(x) = x$, lo que es absurdo. $\square$

En resumen, podemos decir, como el mucamo del tango: “¡Araca! Está el ε ”. Ahora resta convencerse de todo lo demás. Para tomar confianza, no es mala idea observar que si elegimos ε menor estricto que $\text{dist}(0, F(\partial\Omega))$ y K_ε es una ε -aproximación de K , entonces para todo $x \in \partial\Omega$ vale

$$\|x - K_\varepsilon(x) - F(x)\| = \|K_\varepsilon(x) - K(x)\| \leq \varepsilon < \|F(x)\|,$$

lo que nos vuelve a traer a escena a nuestro querido amigo Rouché y nos hace pensar: esto tiene que andar bien. Pero necesitamos un lema que anda allá perdido por las calles del adiós (más precisamente, por la clase 11). Acerquémonos y oigamos lo que decíamos en aquel entonces:

Lema 1.2 *Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua tal que $\text{Im}(g) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\} \simeq \mathbb{R}^k$ para cierto $k < n$. Supongamos que para cierto abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vale $g(x) \neq x$ para $x \in \partial\Omega$. Entonces*

$$\deg(Id - g, \Omega, 0) = \deg((Id - g)|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^k}, \Omega \cap \mathbb{R}^k, 0).$$

Claro, en esa época el ‘deg’ era uno solo; a partir de ahora, conviene usar una notación distinta para el grado de Brouwer, digamos, $\deg_B$, y el de Leray-Schauder $\deg_{LS}$ que estamos por definir. Y ya que estamos recordando, hermano, qué tiempos aquellos, cabe también mencionar el hecho bastante trivial de que el grado de Brouwer se generaliza a cualquier espacio de dimensión finita V mediante un isomorfismo $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos $\Omega \subset V$ un abierto acotado, $f : \overline{\Omega} \rightarrow V$ continua y $p \notin f(\partial\Omega)$, entonces

$$\deg_B(f, \Omega, p) := \deg_B(\phi f \phi^{-1}, \phi(\Omega), \phi(p)).$$

Esto alcanza para definir el grado de Leray-Schauder tal como anticipamos. Para $F = I - K : \overline{\Omega} \rightarrow X$ como antes y $\varepsilon < \text{dist}(0, F(\partial\Omega))$, tomamos una ε -aproximación $K_\varepsilon : \overline{\Omega} \rightarrow V_\varepsilon$ de K con $\dim V < \infty$ y definimos:

$$\deg_{LS}(F, \Omega, 0) := \deg_B((I - K_\varepsilon)|_{\overline{\Omega} \cap V_\varepsilon}, \Omega \cap V_\varepsilon, 0).$$

Por supuesto, la gracia ahora consiste en verificar que la definición no depende de K_ε . Para esto, tomemos otra ε -aproximación de rango finito $\hat{K}_\varepsilon : \overline{\Omega} \rightarrow \hat{V}_\varepsilon$ y consideremos el subespacio $V = V_\varepsilon + \hat{V}_\varepsilon$. Si $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo

tal que $\phi(V_\varepsilon) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \simeq \mathbb{R}^k$, entonces por el lema anterior se deduce para $f = (I - K_\varepsilon)|_V$ que

$$\deg_B(f, \Omega \cap V, 0) = \deg_B(\phi f \phi^{-1}, \phi(\Omega \cap V), 0)$$

$$\deg_B(\phi f \phi^{-1}|_{\phi(\Omega \cap V) \cap \mathbb{R}^k}, \phi(\Omega \cap V) \cap \mathbb{R}^k, 0) = \deg_B(f|_{\bar{\Omega} \cap V_\varepsilon}, \Omega \cap V_\varepsilon, 0).$$

De la misma forma se prueba que

$$\deg_B(\hat{f}, \Omega \cap V, 0) = \deg_B(\hat{f}|_{\bar{\Omega} \cap \hat{V}_\varepsilon}, \Omega \cap \hat{V}_\varepsilon, 0),$$

donde $\hat{f} = (I - \hat{K}_\varepsilon)|_V$ y la buena definición queda demostrada porque la homotopía

$$\lambda f + (1 - \lambda) \hat{f}$$

no se anula en el borde de $\Omega \cap V$.² En efecto,

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1 - \lambda) \hat{f}(x) &= x - [\lambda K_\varepsilon(x) + (1 - \lambda) \hat{K}_\varepsilon(x)] \\ &= x - K(x) - [\lambda(K_\varepsilon(x) - K(x)) + (1 - \lambda)(\hat{K}_\varepsilon(x) - K(x))], \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\|\lambda f(x) + (1 - \lambda) \hat{f}(x)\| \geq \|x - K(x)\| - \varepsilon > 0.$$

¿Qué hacemos ahora con este grado? En primer lugar, verificar que se cumplen todas las propiedades que esperamos:

1. Normalización:

$$\deg_{LS}(I, \Omega, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in \Omega \\ 0 & \text{si } 0 \notin \Omega \end{cases}$$

2. Solución: Si $\deg_{LS}(I - K, \Omega, 0) \neq 0$ entonces K tiene al menos un punto fijo en Ω .

3. Aditividad-escisión: Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ son abiertos disjuntos y K no tiene puntos fijos en $\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, entonces

$$\deg_{LS}(I - K, \Omega, 0) = \deg_{LS}(I - K, \Omega_1, 0) + \deg_{LS}(I - K, \Omega_2, 0).$$

4. Invariancia por homotopía: Si $K : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow X$ es compacto tal que $K_\lambda := K(\cdot, \lambda)$ no tiene puntos fijos en $\partial\Omega$ para $\lambda \in [0, 1]$, entonces $\deg_{LS}(I - K_\lambda, \Omega, 0)$ es constante.

²Cabe aclarar que se trata obviamente del borde como subconjunto de V (a modo de nota pintoresca, observar que el borde como subconjunto de X es $\bar{\Omega} \cap V$, ya que V tiene interior vacío).

La demostración es inmediata a partir de la definición y las propiedades del grado de Brouwer. Cabe aclarar que la última está enunciada de esa forma para que sea más sencilla la prueba: alcanza con aproximar la homotopía por medio de un operador de rango finito. Sin embargo, se puede generalizar, pidiendo solamente que K_λ sea compacto para todo λ y $\{K(x, \cdot) : x \in \overline{\Omega}\}$ equicontinuo. Y también se puede variar el dominio de manera continua, al igual que con el grado de Brouwer. Una vez definido el grado en 0, por traslación podemos definir el grado en cualquier punto $p \notin F(\partial\Omega)$:

$$\deg(I - K, \Omega, p) := \deg(I - K - p, \Omega, 0).$$

Recordemos que la invariancia por homotopía (o el hecho de ser localmente constante, lo que hayamos probado primero) es lo que garantiza que el conjunto de valores admisibles de p para los que el grado es no nulo es abierto. En particular, si K es además lineal, tenemos una versión elemental de la alternativa de Fredholm, aquella que decía que “unicidad $\implies$ existencia”: para $\lambda \neq 0$, si $\lambda I - K$ es inyectiva entonces es un isomorfismo. Veamos en principio la suryectividad: para eso, podemos definir $\hat{K} = \frac{1}{\lambda}K$, que solo se anula en el origen. Esto implica que $\deg(I - \hat{K}, B_r(0), 0)$ no depende de r ; si logramos probar que es distinto de 0, entonces $\deg(I - \hat{K}, B_r(0), p) \neq 0$ para p chico. Esto quiere decir que $\text{Im}(I - \hat{K})$ contiene un entorno del origen y usando la linealidad se deduce que $\lambda I - K$ es suryectiva. Y para probar la continuidad de la inversa, uno podría pensar: “teorema de la aplicación abierta, qué falta que me hacés”. Sin embargo, para esta clase de operadores la demostración es directa: si $\lambda x_n - Kx_n \rightarrow 0$ y $x_n \not\rightarrow 0$, podemos suponer $\|x_n\| \geq \varepsilon > 0$ para todo n . Entonces $\lambda y_n - Ky_n \rightarrow 0$, donde $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$. La sucesión $\{Ky_n\}$ tiene alguna subsucesión que converge a cierto $y \neq 0$, que verifica $Ky = \lambda y$, lo que es absurdo. Lo curioso es que, en principio, el hecho de que $\deg(I - \hat{K}, B_r(0), 0) \neq 0$ no es tan inmediato, aunque uno puede sacar un inesperado as de la manga: un operador lineal es impar, ¿podremos usar entonces el teorema de Borsuk? La generalización de este resultado para operadores impares de la forma $I - K$ queda como ejercicio; a modo de ayuda, cabe observar que si K es impar entonces cualquier ε -aproximación se puede “imparizar”.

Observación 1.3 *En realidad se puede probar que, al igual que en $\mathbb{R}^n$, el grado es ± 1 y, de hecho, su cálculo es una especie de generalización de la idea de mirar el signo del determinante. Para entenderlo, pensemos un poco primero el caso de una matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: si solo nos interesa el signo del determinante, podemos olvidarnos de los autovalores complejos, que siempre aparecen de a pares conjugados. Y, para ser sinceros, tampoco nos interesan los autovalores positivos: el signo de $\det(A)$ va a ser simplemente $(-1)^s$, donde s es la suma de las multiplicidades de todos los autovalores negativos. Y aquí entra en juego una sutileza: se trata de la multiplicidad algebraica y no la geométrica, que en principio podría dar más chica. Si ahora escribimos $A = I - K$, entonces cada autovalor $\lambda < 0$ de A se transforma en un autovalor $\sigma = 1 - \lambda > 1$ de K . Eso es exactamente lo que se prueba para un operador K compacto en un espacio de*

Banach: si K no tiene puntos fijos no triviales, entonces $\deg(I - K, B_r(0), 0) = (-1)^s$, donde s es la suma de las multiplicidades algebraicas de los autovalores de K que son mayores que 1. No parece muy claro a qué nos referimos con “multiplicidad algebraica”, aunque coincide con aquella cuenta que uno aprendió en Álgebra Lineal: si calculamos la sucesión de subespacios $\ker(\sigma I - K)^j$, se prueba que es creciente y en algún momento se estabiliza, es decir, existe j tal que $\ker(\sigma I - K)^k = \ker(\sigma I - K)^j$ para $k \geq j$. La multiplicidad algebraica se define como la dimensión de $\ker(\sigma I - K)^j$. Se pueden ver los detalles de todo esto en [1].

2 Aplicación a problemas de contorno

Vayamos ahora a las aplicaciones más obvias, empezando siempre por la primera que vimos en el curso, cuando hicimos nuestras primeras armas (¡ah, qué chistoso!) en el método de shooting: si f es acotada, para el problema de Dirichlet

$$u''(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u(T) = 0$$

se define, como siempre, el operador de punto fijo $K = L^{-1}N : v \mapsto u$, que en este caso no solo es compacto sino acotado:

$$\|Kv\|_\infty = \|u\|_\infty \leq c\|u''\|_\infty = c\|f(\cdot, v)\|_\infty \leq c\|f\|_\infty.$$

Luego, para $R > c\|f\|_\infty$ la homotopía $I - \lambda K$ no se anula en $\partial B_R(0)$ para $\lambda \in [0, 1]$, de modo que

$$\deg_{LS}(I - K, B_R(0), 0) = \deg_{LS}(I, B_R(0), 0) = 1.$$

Lo mismo ocurre si f depende también de u' , aunque en este caso el espacio de Banach no es el de las funciones continuas sino $C^1[0, T]$. Y el método también funciona para el problema de Neumann o periódico, aunque hay que moverse un poquito de la resonancia. Por ejemplo, para el problema

$$u''(t) - \mu u(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

con $\mu > 0$, f acotada y T -periódica en t , el operador $Kv := u$ también es homotópico a la identidad para $R \gg 0$. Esto es lo que usamos en general en nuestros truncamientos más celebrados, como las condiciones de Hartman o las super y subsoluciones.

Por supuesto, la invariancia por homotopía también se puede usar aunque f no sea acotada: por ejemplo, cuando f es creciente (ejercicio). Y también en aquella ecuación tan celebrada

$$u''(t) + \alpha u'(t) + u(t)^3 = p(t),$$

con $\alpha > 0$ y $p \in C_T$ de promedio 0, para la cual vimos que existen cotas de las soluciones T -periódicas del problema

$$u''(t) + \alpha u'(t) + u(t) = \lambda[p(t) + u(t) - u(t)^3].$$

En tal caso, el operador compacto $K_\lambda : v \mapsto u$ es simplemente el que asigna a cada $v \in C_T$ la única solución T -periódica del problema

$$u''(t) + \alpha u'(t) + u(t) = \lambda[p(t) + v(t) - v(t)^3].$$

Queda para el lector verificar que K_λ está bien definido. Las cotas a priori dicen entonces que si $R \gg 0$ entonces

$$\deg_{LS}(I - K_1, B_R(0), 0) = \deg_{LS}(I - K_0, B_R(0), 0),$$

pero con tanta buena suerte que $K_0 \equiv 0$, de modo que el grado es 1.

Pero volvamos a las suber y subsoluciones, por ejemplo para el problema periódico, para ver si el grado nos puede dar más información. Si tenemos una sub y una supersolución estrictas

$$\alpha''(t) > f(t, \alpha(t), \alpha'(t)), \quad \beta''(t) < f(t, \beta(t), \beta'(t))$$

con $\alpha < \beta$ y suponemos que se cumple la condición de Nagumo para cierto R_N , entonces podemos definir

$$\Omega := \{u \in C_T^1 : \alpha(t) < u(t) < \beta(t), |u'(t)| < R_N\}$$

y, para $\mu > 0$, el operador compacto $\hat{K} : C_T^1 \rightarrow C_T^1$ que a cada v le asigna la única solución del problema truncado por partida doble:

$$u''(t) - \mu u(t) = f(t, P(t, v(t)), Q(v'(t))) - \mu P(t, v(t)).$$

Como el término de la derecha es acotado, ya sabemos que el grado de $\hat{K}$ es 1 sobre bolas de radio $R \gg 0$. Pero además sabemos que los truncamientos no truncan, así que no hay soluciones fuera de Ω . Aquí el detalle es que en realidad en zooms pretéritos habíamos visto que los posibles puntos fijos de $\hat{K}$ vivían en $\bar{\Omega}$, pero el hecho de que α y β sean estrictas impide también que haya puntos fijos en el borde: por ejemplo, si u es un punto fijo y $u - \beta$ alcanza su máximo en t_0 con $u(t_0) = \beta(t_0)$, entonces $u'(t_0) = \beta'(t_0)$ y además

$$0 \leq u''(t_0) - \beta''(t_0) = f(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0)) - \beta''(t_0) < 0,$$

lo que es absurdo. Pero entonces por escisión vale

$$\deg(\hat{K}, \Omega, 0) = \deg(\hat{K}, B_R(0), 0) = 1.$$

Un lector perspicaz habrá observado que le pusimos un sombrero al operador que involucra el truncamiento. Esto es porque en realidad hay otro operador, ante el que nos sacamos el sombrero: se trata del operador $K : v \mapsto u$ que se define directamente a partir del problema

$$u''(t) - \mu u(t) = f(t, v(t), v'(t)) - \mu v(t).$$

En principio, no tenemos mucha idea de cómo se comporta K , pero de una cosa estamos seguros: sobre Ω coincide con $\hat{K}$. Esto nos brinda un resultado útil para tener disponible, si precisamos una ayuda o nos hace falta un consejo:

$$\deg(K, \Omega, 0) = \deg(\hat{K}, \Omega, 0) = 1.$$

2.1 Tres soluciones, tuve en mi vida

Una situación típica es aquella en la que hay más de un par de super y subsoluciones, porque los truncamientos cambian pero el K se mantiene siempre fiel a nosotros. Por ejemplo, si tenemos sub y supersoluciones estrictas tales que

$$\alpha_1 < \beta_1, \quad \alpha_2 < \beta_2$$

y además

$$\alpha_1 < \beta_2, \quad \alpha_2 \not< \beta_1.$$

Si f cumple la condición de Nagumo entre α_1 y β_2 para cierto R_N , entonces tenemos tres abiertos:

$$\Omega_j = \{u : \alpha_j < u < \beta_j, |u'| < R_N\}$$

para $j = 1, 2$ y además

$$\Omega = \{u : \alpha_1 < u < \beta_2, |u'| < R_N\}.$$

Es claro que los dos primeros son subconjuntos disjuntos del último aunque, en primera instancia, el hecho de que haya una solución entre α_1 y β_2 no parece agregar gran cosa a lo que ya sabemos: podría, en efecto, coincidir con alguna de las que ya conocíamos entre α_j y β_j . Pero ahora empieza a entenderse por qué nos preocupamos por calcular el grado, ya que

$$\deg(I - K, \Omega_1, 0) = \deg(I - K, \Omega_2, 0) = \deg(I - K, \Omega, 0) = 1$$

y por la propiedad de escisión se deduce que

$$\deg(I - K, \Omega \setminus \overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}, 0) = -1,$$

lo que da una prueba fehaciente de que no hay dos sin tres. Es el llamado *teorema de las tres soluciones*. Un ejemplo es la ecuación del péndulo forzado

$$u''(t) + au'(t) + b \sin u(t) = p_0(t) + s$$

con $p_0 \in C_T$ de promedio 0 para el que, según vimos, existe un intervalo compacto $I = I(p_0)$ tal que el problema tiene solución T -periódica si y solo si $s \in I$. Pero, además, si $s \in I^\circ$ entonces existen al menos dos soluciones geoméricamente distintas. Esto es porque, como ya vimos, si $s_1 < s_2$ son elementos de I con $s_1 < s < s_2$, entonces tomando respectivas soluciones u_1 y u_2 se verifica que u_1 es supersolución y u_2 es subsolución, ambas estrictas. Además, sumando $2k\pi$ se puede suponer que u_1 le gana a u_2 ; la clave está en elegir ahora k mínimo, de modo que

$$u_2(t) < u_1(t), \quad u_2 + 2\pi \not< u_1(t).$$

Esto genera una pequeña confusión en los subíndices, aunque es inmediato verificar que se aplica el teorema de las tres soluciones, con

$$\alpha_1 = u_2, \quad \beta_1 = u_1, \quad \alpha_2 = u_1 + 2\pi, \quad \beta_2 = u_2 + 2\pi.$$

Si nos preguntan, con ánimos de progenitor exigente, por qué dos y no tres, la respuesta es obvia: la solución que encontramos entre α_1 y β_1 podría ser igual (módulo 2π) a la que existe entre α_2 y β_2 ; en cambio, la tercera solución difiere de ambas y en consecuencia es geoméricamente distinta.

2.2 El retorno de la resonancia

En esta sección nos enfocaremos nuevamente la reducción de Lyapunov-Schmidt, que permite estudiar un problema de la forma $Lu = Nu$ a partir de una ecuación en dimensión finita que se obtiene proyectando sobre el núcleo. Esto lo vimos en la clase 14 con el método de averaging; ahora, como es de esperar, se trata de aplicar grado de Brouwer. De acuerdo con lo que vimos, el ejemplo más inmediato es el de un problema periódico

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$$

donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y T -periódica en T . Como f depende de u' , el espacio que emplearemos es C_T^1 . En ese contexto, tenemos los operadores $L : C_T^2 \subset C_T^1 \rightarrow C_T$ y $N : C_T^1 \rightarrow C_T$ y ya sabemos que

$$\ker(L) = \{\varphi \in C_T^2 : \varphi \text{ es constante}\} \simeq \mathbb{R}^n$$

y

$$\text{Im}(L) = \{\varphi \in C_T : \bar{\varphi} = 0\} := \tilde{C}_T,$$

lo que permite definir una inversa a derecha compacta $K : \tilde{C}_T \rightarrow \tilde{C}_T^1 \subset C_T^1$. Ya aprendimos en su momento a reescribir el problema en la forma

$$\overline{N(u)} = 0, \quad u = \bar{u} + K[N(u) - \overline{N(u)}],$$

que en realidad es lo mismo que

$$u = \bar{u} + \overline{N(u)} + K[N(u) - \overline{N(u)}].$$

El secreto ahora consiste en agregar un parámetro $\lambda \in [0, 1]$ a esta última ecuación

$$u = \bar{u} + \overline{N(u)} + \lambda K[N(u) - \overline{N(u)}],$$

que se puede escribir en la forma

$$F(u, \lambda) := u - \left[\bar{u} + \overline{N(u)} + \lambda K[N(u) - \overline{N(u)}] \right] = 0,$$

donde el operador que aparece entre corchetes es compacto. De esta forma, si para cierto abierto acotado $\Omega \subset C_T^1$ vale que $F_\lambda(u) := F(u, \lambda) \neq 0$ para $u \in \partial\Omega$, entonces

$$\deg_{LS}(F_1, \Omega, 0) = \deg_{LS}(F_0, \Omega, 0).$$

La primera observación es que, para $\lambda > 0$, la ecuación $F(u, \lambda) = 0$ equivale a decir que $u \in C_T^2$ satisface

$$u''(t) = \lambda f(t, u(t), u'(t)).$$

Pero la parte realmente buena viene ahora, cuando caemos en la cuenta de que F_0 tiene una forma muy especial: se trata, por supuesto, de una perturbación compacta de la identidad, pero para calcular el grado de Leray-Schauder no hace falta molestarse en buscar la aproximación de rango finito porque ya la tenemos: el operador $u \mapsto \bar{u} + \overline{N(u)}$ cae en $\ker(L) \simeq \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\deg_{LS}(F_0, \Omega, 0) = \deg_B(F_0|_{\overline{\Omega} \cap \ker(L)}, \Omega \cap \ker(L), 0).$$

Pero para u constante vale $\bar{u} = u$, así que $F_0(u) = -\overline{N(u)}$. Identificando como corresponde $\ker(L)$ con $\mathbb{R}^n$, se tiene entonces que

$$\deg_{LS}(F_0, \Omega, 0) = \deg_B(\phi, \Omega \cap \mathbb{R}^n, 0),$$

donde

$$\phi(u) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t, u, 0) dt.$$

En resumen, hemos probado el teorema de continuación que puede enunciarse así:

Teorema 2.1 *Sea f continua y T -periódica en t y sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como antes. Supongamos que existe un abierto acotado $\Omega \subset C_T^1$ tal que*

1. $u''(t) \neq \lambda f(t, u(t), u'(t))$ para $u \in \partial\Omega$ y $\lambda \in (0, 1)$.
2. $\phi(u) \neq 0$ para $u \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}^n$.
3. $\deg_B(\phi, \Omega \cap \mathbb{R}^n, 0) \neq 0$.

Entonces el problema $u''(t) = f(t, u(t), u'(t))$ tiene al menos una solución $u \in \overline{\Omega}$.

Algún lector puede sentirse desconcertado porque en la primera condición pusimos $\lambda \in (0, 1)$ en vez de $(0, 1]$, pero eso se arregla más abajo, cuando aseguramos que la solución vive en $\overline{\Omega}$. La razón de ponerlo así reside en el hecho de que, a veces, para encontrar cotas estrictas conviene dejar de lado el caso $\lambda = 1$. Pero la demostración es exactamente la misma: alcanza con observar, al comienzo, que si la ecuación tiene alguna solución en el borde para $\lambda = 1$, entonces no hay nada que probar.

References

- [1] Brown